Numerička matematika — popravni kolokvij (13. srpnja 2009.)

Zadatak 1 (15 bodova.) "Teorijsko pitanje".

(A) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **kubične splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li kubična splajn interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju kubične splajn interpolacije prema funkciji f?

(B) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **linearne splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li linearna splajn interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju linearne splajn interpolacije prema funkciji f?

(C) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **po dijelovima kubične Hermiteove** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije prema funkciji f?

(D) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **potpune kubične splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte **egzistenciju** i **jedinstvenost** potpune kubične splajn interpolacije.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju potpune kubične splajn interpolacije prema funkciji f?

Zadatak 2 (20 bodova.) Linearni sustav faktorizacijom Choleskog.

(A) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 10 & -8 & 0 \\ 2 & -8 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -36 \\ 44 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

(B) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ -4 & -5 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -14 \\ -12 \\ 43 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

(C) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 42 \\ -30 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

(D) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -15 \\ 3 \\ 24 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3 (20 bodova.) Numeričko deriviranje iz interpolacijskog polinoma.

(A) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Prvu derivaciju f' aproksimiramo prvom derivacijom p_3' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

  (a) Nađite takvu aproksimaciju za $f'(x_0)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

  (b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x$$

  i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_0)$ i pripadnu pravu pogrešku.

(B) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Drugu derivaciju f'' aproksimiramo drugom derivacijom p_3'' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f''(x_3)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_3)$ i pripadnu pravu pogrešku.

(C) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Prvu derivaciju f' aproksimiramo prvom derivacijom p_3' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f'(x_3)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_3)$ i pripadnu pravu pogrešku.

(D) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Drugu derivaciju f'' aproksimiramo drugom derivacijom p_3'' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f''(x_0)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_0)$ i pripadnu pravu pogrešku.

Zadatak 4 (15 bodova.) Neprekidna metoda najmanjih kvadrata.

(A) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

na intervalu $[0, \pi/2]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

(B) Zadana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{ch} x$$

na intervalu $[0, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

(C) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x$$

na intervalu $[0, \pi/2]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

(D) Zadana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{sh} x$$

na intervalu $[0, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

Zadatak 5 (20 bodova.) Gaussova integracijska formula.

(A) Odredite težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \sin(\pi x)$ i nađite pravu grešku.

(B) Odredite težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = e^{-x}$ i nađite pravu grešku.

(C) Odredite težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \cos(\pi x)$ i nađite pravu grešku.

(D) Odredite težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = e^x$ i nađite pravu grešku.

Zadatak 6 (20 bodova.) Nelinearna jednadžba.

(A) Nađite najveću pozitivnu nultočku funkcije

$$f(x) = x\,e^{x^2+2x} + x - 2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(B) Nađite najveće pozitivno rješenje jednadžbe

$$x\,e^{2x^2+x} = 18 - 2x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(C) Nađite najmanju pozitivnu nultočku funkcije

$$f(x) = x\,e^{x^2+3x} + x - 3$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(D) Nađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$x\,e^{2x^2+x} = 15 - x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!